ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016

Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 62.

Α2. **α** → Λάθος **β** → Λάθος **γ** → Σωστό **δ** → Λάθος **ε** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α.** **1ος τρόπος**

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\left[\frac{xy^6}{(xy)^3}\right]^1:\frac{y^3}{x^3}=\frac{xy^6}{(xy)^3}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{xy^6x^3}{x^3y^3y^3}=$$

$$=\frac{x^4y^6}{x^3y^6}=\frac{x^4}{x^3}=x$$

2ος τρόπος

$$A=\left[\frac{(xy)^3}{xy^6}\right]^{-1}:\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{\left[(xy)^3\right]^{-1}}{\left(xy^6\right)^{-1}}:\frac{y^3}{x^3}=\frac{(xy)^{-3}}{\left(xy^6\right)^{-1}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=\frac{x^{-3}y^{-3}}{x^{-1}y^{-6}}\cdot\frac{x^3}{y^3}=$$

$$=\frac{x^{-3}y^{-3}x^3}{x^{-1}y^{-6}y^3}=\frac{x^0y^{-3}}{x^{-1}y^{-3}}=\frac{1}{x^{-1}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

β. **1ος τρόπος**

$$B=-(2-y)(y-2)+8y=(y-2)(y-2)+8y=(y-2)^2+8y=$$

$$=y^2-4y+4+8y=y^2+4y+4=(y+2)^2$$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

$$B = -(2-y)(y-2) + 8y = -\left(2y - 4 - y^2 + 2y\right) + 8y =$$
$$= -\left(4y - y^2 - 4\right) + 8y = -4y + y^2 + 4 + 8y =$$
$$= y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$$

γ. **<u>1^{ος} τρόπος</u>**

$$\Gamma = \left(1+\omega^2\right)^2 - \left(1-\omega^2\right)^2 = \left[1+\omega^2+1-\omega^2\right]\cdot\left[1+\omega^2-\left(1-\omega^2\right)\right] =$$
$$= 2\left(1+\omega^2-1+\omega^2\right) = 2\cdot 2\omega^2 = 4\omega^2$$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

$$\Gamma = \left(1+\omega^2\right)^2 - \left(1-\omega^2\right)^2 = 1 + 2\omega^2 + \left(\omega^2\right)^2 - \left[1 - 2\omega^2 + \left(\omega^2\right)^2\right] =$$
$$= 1 + 2\omega^2 + \omega^4 - 1 + 2\omega^2 - \omega^4 = 2\omega^2 + 2\omega^2 = 4\omega^2$$

Β2. Ισχύει: $\left(|A|-1\right)^2 + B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(|x|-1\right)^2 + (y+2)^2 + 4\omega^2 = 0 \qquad (1)$$

Επειδή $\left(|x|-1\right)^2 \geq 0$ και $(y+2)^2 \geq 0$ και $4\omega^2 \geq 0$ από (1) προκύπτουν:

$$\left(|x|-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |x|-1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-1} & \text{ΔΕΚΤΗ αφού } x<0 \\ \text{ή} & \\ x = 1 & \text{ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ αφού } x<0 \end{cases}$$

και

$$(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y+2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y=-2} \text{ ΔΕΚΤΗ}$$

και

$$4\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0} \text{ ΔΕΚΤΗ}$$

Άρα $(x,\ y,\ \omega) = (-1,\ -2,\ 0)$

ΘΕΜΑ Γ

$A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο χόμπι.

Τότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{160}{200} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{180}{200} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Γ1. **α.** $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει και τα δύο χόμπι.
Από τον προσθετικό νόμο ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$0,9 = 0,3 + 0,8 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 1,1 - 0,9 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,2}$$

β. $P(B') = 1 - P(B) \Leftrightarrow$

$$P(B') = 1 - 0,8 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B') = 0,2}$$

οπότε $\boxed{P(B') = P(A \cap B)}$

Γ2. **α.** $B - A$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με υπολογιστές.
Τότε:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(B - A) = 0,8 - 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{P(B - A) = 0,6}$$

β. $(A\cup B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην έχει κανένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B) \Leftrightarrow$$
$$P(A\cup B)' = 1 - 0,9 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{P(A\cup B)' = 0,1}$$

Γ3. **α.** $(A-B)\cup(B-A)$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με ένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.
Τότε:

$$P((A-B)\cup(B-A)) \overset{A-B,\ B-A}{\underset{\text{ασυμβίβαστα}}{=}}$$
$$P(A-B)+P(B-A)=$$
$$P(A)-P(A\cap B)+0,6=$$
$$0,3-0,2+0,6=0,7$$
Άρα $\boxed{P((A-B)\cup(B-A))=0,7}$

β. $A'\cup B'$ ή $(A\cap B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην ασχολείται με υπολογιστές ή να μην ασχολείται με τον αθλητισμό.

<u>**1ος τρόπος**</u>

$$P(A'\cup B') = P(A')+P(B')-P(A'\cap B') =$$
$$P(A')+P(B')-P(A'-B) =$$
$$P(A')+P(B')-(P(A')-P(A'\cap B)) =$$
$$P(A')+P(B')-P(A')+P(A'\cap B) =$$
$$P(B')+P(B)-P(A\cap B) =$$
$$1-P(A\cap B) =$$
$$1-0,2=0,8$$
Άρα $\boxed{P(A'\cup B')=0,8}$

2ος τρόπος

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' =$
$1 - P(A \cap B) =$
$1 - 0,2 = 0,8$
Άρα $\boxed{P(A' \cup B') = 0,8}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\alpha \geq 1$ έχουμε,

$$A = \sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}}^{\,2} - 2\sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}} \cdot \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}}^{\,2} =$$
$$\alpha - 2\sqrt{\alpha-1} - 2\sqrt{\alpha^2 - \left(2\sqrt{\alpha-1}\right)^2} + \alpha + 2\sqrt{\alpha-1} =$$
$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha-1)} =$$
$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4} =$$
$$2\alpha - 2\sqrt{(\alpha-2)^2} =$$
$$2\alpha - 2|\alpha-2|$$

$$B = \left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}-1\right) =$$
$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[8]{\alpha}^{\,2} - 1^2\right) =$$
$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}-1\right) =$$
$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt[4]{\alpha}^{\,2} - 1^2\right) =$$
$$\left(\sqrt{\alpha}+1\right)\left(\sqrt{\alpha}-1\right) =$$
$$\sqrt{\alpha}^{\,2} - 1^2 =$$
$$\alpha - 1$$

Δ2. Αφού $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha - 2 \geq 0$. Επομένως $|\alpha-2| = \alpha - 2$

Άρα $A = 2\alpha - 2(\alpha-2) = 2\alpha - 2\alpha + 4 = 4$

α. $|A+B| = |4+\alpha-1| = |\alpha+3| = \alpha+3$ αφού για $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha + 3 > 0$

β. Είναι $\alpha^2 x = |A+B| + 4x - 1$ και αφού $|A+B| = \alpha + 3$ είναι

$\alpha^2 x = \alpha + 3 + 4x - 1$ ή

$\alpha^2 x - 4x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha^2 - 4)x = \alpha + 2$ ή

$(\alpha+2)(\alpha-2)x = \alpha + 2$

Είναι $\alpha \geq 2$ επομένως $\alpha + 2 \neq 0$. Διαιρώντας την τελευταία σχέση με α + 2 έχουμε $(\alpha - 2)x = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha - 2 = 0$ δηλαδή αν α = 2 η εξίσωση γίνεται $0x = 1$ που είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{1}{\alpha - 2}$

Δ3. **<u>1ος τρόπος</u>**

Είναι $x_0 = \dfrac{1}{\alpha - 2}$ για $\alpha > 2$

Έχουμε $x_0^2 = \left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0$, για κάθε $\alpha > 2$

Διαιρούμε με $x_0^2 > 0$ και τα δύο μέλη της $(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6 - 2\alpha)x_0^2$ και έχουμε

$$\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right)^2 + \frac{x_0^2}{x_0^2} > 6 - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 1 - 6 + 2\alpha > 0 \overset{x_0 = \frac{1}{\alpha-2}}{\Leftrightarrow}$$

$$[1 - (\alpha - 2)]^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha + 2)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - \alpha)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha - 2)^2 > 0$ που είναι αληθής για $\alpha > 2$

2ος τρόπος

Για $x_0 = \dfrac{1}{\alpha-2}$ έχουμε

$$(x_0-1)^2 + x_0^2 > (6-2\alpha)x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-\frac{\alpha-2}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6-2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 - 2(3-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}-\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$1 > 0$ που ισχύει

3ος τρόπος

Το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης για $x_0 = \dfrac{1}{\alpha-2}$ γίνεται

$$(x_0-1)^2 + x_0^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1-(\alpha-2)}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq\gamma$ ισχύει:

$$(\beta-\gamma)^2>0\Leftrightarrow\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2>0\Leftrightarrow\beta^2+\gamma^2>2\beta\gamma \qquad (2)$$

Έστω $\beta=\dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}$ και $\gamma=\dfrac{1}{\alpha-2}$ με $\alpha-2\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq2$

Αν $\beta=\gamma\Leftrightarrow\dfrac{3-\alpha}{\alpha-2}=\dfrac{1}{\alpha-2}\Leftrightarrow 3-\alpha=1\Leftrightarrow3-1=\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$ άτοπο

Άρα $\beta\neq\gamma$

Τότε για κάθε $\alpha>2$ λόγω της (2), από την (1) έχουμε:

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>2\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>\frac{2(3-\alpha)}{(\alpha-2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2>(6-2\alpha)\frac{1}{(\alpha-2)^2}\overset{x_0=\frac{1}{\alpha-2}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x_0-1)^2+x_0^2>(6-2\alpha)x_0^2 \text{ για κάθε } \alpha>2$$